به نام خدا

ریاضی عمومی ۱
پاییز ۹۵-۹۴

دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

فصل سوم-رسم نمودار تابع

در این بخش سعی خواهیم کرد که نمودار تقریبی توابع را با بررسی مشتق دوم آنها رسم کنیم. ابتدا خواهیم دید که علامت مشتق دوم تابع می‌تواند در تعیین جهت تقعر نمودار و نیز در تشخیص اینکه نقاط اکسترمم[1]، ماکسیمم هستند یا مینیمم کمک‌کننده باشد. در انتهای کاربرگ، این مطالب را در رسم چند نمودار تقریبی به کار خواهیم بست.

فعالیت ۱. گزاره زیر را ثابت کنید.

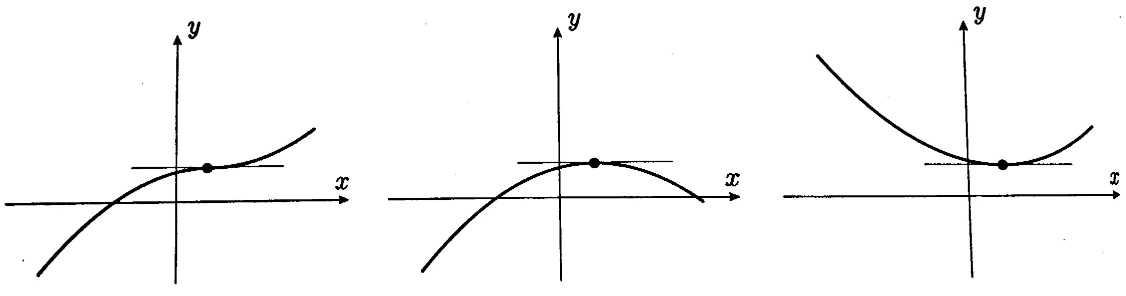
گزاره ۱. فرض کنید I یک بازه، تابع $f: I \to \mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر و مشتق دوم آن روی بازه I مثبت (منفی) باشد. در این صورت، به‌ازای هر نقطه درونی I مانند a، اگر $x \neq a$، آنگاه $f(x)$ بالای (پایین) خط مماس در نقطه a قرار دارد. به بیان دیگر

الف) اگر $f'' > 0$ و $x \neq a$،

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a).$$

ب) اگر $f'' < 0$ و $x \neq a$،

$$f(x) < f(a) + f'(a)(x-a).$$



(پ) (ب) (الف)

شکل ۱: دقت کنید در نمودار (پ) مشتق دوم در نقطه مشخص شده تغییر علامت می‌دهد.

[1] نقطه‌ی اکسترمم، نقطه‌ای است که تابع در آن ماکسیمم یا مینیمم دارد.

تعریف ۲. تابعی را محدب می‌گوییم که خط واصل بین هر دو نقطه از نمودار آن بالای نمودار قرار گیرد. این شرط را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f\left((1-t)x_1+tx_2\right)<(1-t)f(x_1)+tf(x_2),\quad \forall t\in]0,1[.$$

تابع را مقعر گوییم اگر نامساوی بالا برعکس باشد. می‌خواهیم بررسی کنیم که علامت مشتق دوم چه ارتباطی با محدب یا مقعر بودن تابع دارد.

گزاره ۳. فرض کنید I یک بازه، تابع $f:I\to\mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر و f'' روی I مثبت (منفی) باشد. در این صورت، به ازای هر دو نقطه متمایز از I مانند a و b، خط واصل دو نقطه $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ بالای (پایین) نمودار f قرار دارد.

فعالیت ۲ (اثبات گزاره ۳). با برهان خلف، فرض کنید t ای وجود دارد که $(a,f(a))$، $(t,f(t))$ و $(b,f(b))$ روی یک خط قرار دارند.

الف) با استفاده از قضیه مقدار میانگین نشان دهید که نقاط t_1 و t_2 ای وجود دارند که $f'(t_1)=f'(t_2)$؛ و از آن نتیجه بگیرید که u ای وجود دارد که $f''(u)=0$.

ب) فرض کنید $f''>0$. حالت $f''<0$ مشابه است. بنابر قسمت (الف)، کل نمودار بالای خط واصل است یا پایین خط واصل. با استفاده از گزاره ۳، اثبات را تمام کنید.

نتیجه ۴ (آزمون مشتق دوم). فرض کنید تابع f روی بازه‌ای حول نقطه درونی a از دامنه‌اش مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق دوم داشته باشد. علاوه‌براین، فرض کنید $f'(a)=0$.

الف) اگر $f''(a)>0$، نقطه a نقطه مینیمم موضعی است.

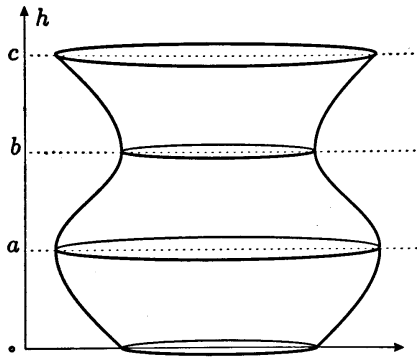
ب) اگر $f''(a)<0$، نقطه ماکسیمم موضعی است.

فعالیت ۳.

الف) نمودار تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x)=x^{۴}-x^{۳}$ رسم کنید.

ب) نمودار تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x)=x-\sin(x)$ رسم کنید.

ج) گلدانی به صورت شکل ۲ داریم. در این گلدان با آهنگ ثابت آب می‌ریزیم تا پر شود. نمودار تغییر ارتفاع آب در گلدان را برحسب زمان رسم کنید.



شکل ۲